Die Mathematik im griechischen Altertum

Claudius Knaak

1999 - 2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Allgemeiner Überblick

Die griechische Mathematik beginnt circa 600 v. Chr. und endet circa 300 n. Chr. Man unterscheidet vier verschiedene Abschnitte:

1. „Ionische Periode (Thales, Pythagoras, Anaxagoras, Hippokrates, ...) 600-400 v. Chr.

2. Athenische Periode (Sophisten, Platon, Deinostratos, ...) 400-300 v. Chr.

3. Alexandrische Periode (Eukleides, Archimedes, Nikomedes, ...) 300-200 v. Chr.

4. Spätzeit (Hipparchos, Heron, Pappos, ...) 200 v. Chr. -300 n. Chr.“ ([5], Seite 1).

Vor den Griechen kannte man Mathematik seit 2000 Jahren. Es gab schon ein schriftlich fixiertes Zahlensystem, Rechenmethoden und die Anfänge der Geometrie. Jedoch führten erst die Griechen eine abstrakte Mathematik ein, „die sich auf logische Strukturen von Definitionen, Axiomen und Beweisen gründete“. ([4], „Mathematik“). Die mathematischen Texte der vorgriechischen Mathematik waren zum großen Teil Aufgabentexte, die manchmal auch vorgerechnete Lösungswege enthielten, jedoch ohne Begründungen für die Rechenschritte. Man kannte vor den Griechen noch keine Beweise, denn sogar die wenigen Lehrtexte die es gab, „in denen ein allgemein anwendbares Verfahren beschrieben wird“, waren ohne Begründungen ([1], Vorwort Seite XVI).
Zu den ersten Theorien, die im 5. Jahrhundert v. Chr. entstanden, zählt „die Lehre von Geraden und Ungeraden“, die zu der Arithmetik der Pythagoreer zu zählen ist. Ein erstes mathematisches Lehrbuch, die sogenannten ersten „Elemente“, hat um circa 440 v. Chr. Hippokrates von Chios verfaßt.

Für die griechische Mathematik war die Inkommensurabilität von Strecken, also die Tatsache, dass zwei Strecken nicht vergleichbar sein können, ein großes Problem. Denn es gab die Hoffnung, „alle geometrischen und astronomischen Verhältnisse ebenso wie die musikalischen in ganzen Zahlen ausdrücken zu können“ ([1], Vorwort Seite XVII). Diese Hoffnung wurde durch die Erkenntnis zerstört, dass es „keine natürlichen Zahlen n und m [gibt], deren Quotient das Verhältnis einer Seite zur Diagonalen [eines Quadrates] ausdrückt.“ ([4], „Mathematik“) Ein solches Verhältnis kann man nur mit Hilfe der „irrationalen Zahlen“ angeben.
Die „Quadratur des Kreises“ ist ein weiteres, wichtiges Problem. Dabei geht es darum, ausschließlich „mit Hilfe von Lineal und Zirkel ein Quadrat zu konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt haben soll, wie ein vorgegebener Kreis“ ([4], „Mathematik“). Man versuchte mit eingeschriebenen bzw. umschriebenen Vielecken das Problem zu lösen. Archimedes wurde durch diesen Lösungsansatz dazu veranlasst, die Kreiszahl Pi (π) zu bestimmen.

Kapitel 2

Die Pythagoreer

2.1 Leben und Wirken der Pythagoreer

Der griechische Philosoph Pythagoras wurde circa 570 v. Chr. in Samos geboren. Nachdem er sich 530 v. Chr. in Kroton, einer griechischen Kolonie in Süditalien, niedergelassen hatte, gründete er die Schule der Pythagoreer. Er starb um 500 v. Chr. wahrscheinlich in Metapont. Seine Philosophie ist nur durch die Schriften seiner Schüler erhalten geblieben. Sie verehrten ihn sehr und wurden stark von ihm beeinflusst. Einiges, was Pythagoras zugeschrieben wird, stammt jedoch gar nicht von ihm. So soll der „nach ihm benannte „Satz des Pythagoras“ [...], der ihm von Proklos zugeschrieben wurde, [...] aus älterer Zeit [stammen]“ ([4], „Pythagoras“).
Die Pythagoreer glaubten an „die mathematische Ordnung der (göttlich geschaffenen) Welt“ ([4], „Pythagoras“). Mit Hilfe ihrer Zahlentheorie versuchten sie die Welt zu erklären, indem sie zahlentheoretische Sätze aufstellten und diese auf verschiedenen Gebieten anwandten. So zum Beispiel auf die Musiktheorie, Geometrie, Kosmologie und „überhaupt auf alle Bereiche des Seienden, wo immer sie Abbilder der Zahlen erblickten“ ([1], Seite 232).

2.2 Zahlentheorie

Die „Zahlentheorie“ ist heute ein Zweig der Mathematik, der sich mit den Eigenschaften der Zahlen und deren Beziehungen beschäftigt. „Im Allgemeinen beschränkt sie sich jedoch auf die Untersuchung der ganzen Zahlen oder Zahlenmengen mit ähnlichen Eigenschaften.“ ([4], „Zahlentheorie“). Die Tatsache, dass sie sich heute vor allem mit den ganzen Zahlen beschäftigt, lässt aus meiner Sicht den Schluss zu, dass die Zahlentheorie der Pythagoreer, die sich ausschließlich mit ganzen Zahlen beschäftigte, da sie ja noch keine anderen Zahlen kannten, der Ursprung unserer heutigen Zahlentheorie ist. Sie behandelt unter anderem das Wesen ganzer Zahlen. Dabei werden die Begriffe „ein Vielfaches“, „Teiler“ bzw. „Faktoren“, „echter Teiler“[1] , „gerade ganze Zahlen“ , „ungerade ganze Zahlen“ , eine „perfekte“ bzw. „vollkommene Zahl“[2] und schließlich der Begriff der „unvollkommenen Zahl“[3] definiert. Hauptsächlich geht es in der Zahlentheorie jedoch um die Untersuchung von Primzahlen. Dabei wird natürlich festgelegt, was eine Primzahl ist und dass das Ergebnis eines Produkts aus Primzahlen als „zusammengesetzte Zahl“ bezeichnet wird. Des weiteren werden zwei Primzahlen mit der Differenz zwei als „Primzahlzwillinge“ bezeichnet. Man berechnet den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen und nennt sie „teilerfremd“ , wenn dieser Eins ist. Und schließlich sind zwei Zahlen kongruent, wenn sie bei der Division mit einer dritten Zahl denselben Rest übrig lassen.

2.3 Arithmetik

2.3.1 Abgrenzung zur Zahlentheorie

Wörtlich übersetzt heißt Arithmetik „zum Zählen gehörend“. Ebenso wie die Zahlentheorie beschäftigt sie sich mit Zahlen, wobei die Arithmetik die „Kenntnisse der Zahlen und des Rechnens“ umfasst ([4], „Arithmetik“). Eine eindeutige Trennung der beiden Gebiete ist nicht möglich, da es Überschneidungen gibt. So wird auch in der Arithmetik zum Beispiel die Teilbarkeitslehre behandelt ([6], Seite 39). Der wesentliche Unterschied liegt jedoch darin, daß sich die Zahlentheorie mehr mit den Eigenschaften der Zahlen beschäftigt, während sich die Arithmetik mehr auf das Rechnen selbst konzentriert. Hierbei geht es um die Erweiterung von Zahlenbereichen und um die Definitionen der vier Grundrechenarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, sowie die Definition von negativen Zahlen. Mit letzterer dürften sich die Pythagoreer kaum beschäftigt haben, da man damals nur die positiven, natürlichen ganzen Zahlen kannte und als Zahlen akzeptierte.

[1] $a = bc$; wenn $c \neq \pm 1$, dann „ist b ein echter Teiler von a“ ([4], „Zahlentheorie“)

[2] Dies ist „eine positive ganze Zahl, die gleich der Summe aller ihrer Positiven echten Teiler ist“; z.B.: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ ([4], „Zahlentheorie“)

[3] Wenn die Summe der Positiven echten Teiler kleiner als die Zahl ist, nennt man sie defizient; ist die Summe größer, nennt man sie abundant

2.3.2 Historischer Hintergrund und Problem des Irrationalen

Ausgangspunkt für die Arithmetik der Pythagoreer, also den Umgang mit den Zahlen unter Verwendung der vier Grundrechenarten, ist die Bruchrechnung. Die Griechen haben Teile der Arithmetik von den Babyloniern und Ägyptern übernommen, die jedoch „bereits hochstehende, komplizierte Methoden für die Lösung mathematischer Probleme höherer Ordnung entwickelt hatten“ ([1], Seite 207), wohingegen die griechische Mathematik im 5. Jahrhundert v. Chr. noch am Anfang stand. Anders als die Babylonier kannten die Griechen irrationale Zahlen noch nicht. Für sie war die Eins nicht teilbar und deshalb haben sie Brüche nicht als Zahlen gesehen. Somit haben sie an die Stelle der Brüche Zahlenverhältnisse gesetzt. Hieraus ist die Grundlage der pythagoreischen Arithmetik entstanden, die im Buch VII der zahlentheoretischen Bücher VII und VIII Euklids genannt wird. Es geht dabei um die Theorie der Zahlenproportionen, die Lehre von der Teilbarkeit der ganzen Zahlen, den größten gemeinsamen Teiler, (der vom Kürzen der Brüche stammt,) das kleinste gemeinsame Vielfache, (das aus dem Gleichnamigmachen der Brüche entstand) und um die teilerfremden Zahlen, wobei teilerfremde Zahlenpaare gekürzten Brüchen entsprechen. Die Unwissenheit über die Existenz des Irrationalen hatte die Folge, dass sich die babylonischen algebraischen Gleichungen und ihre Lösungen nicht immer auf das griechische Zahlenverständnis übertragen ließen, da sie unter Zahlen nur rationale, also ganze Zahlen verstanden. Da sich die Griechen nicht mit genäherten Lösungen zufrieden gaben, was sich vor allem an der Einführung von schriftlichen Beweisen widerspiegelt, mussten sie die babylonischen Gleichungen ins Geometrische übertragen. Denn die Lösungen unter Zuhilfenahme der Geometrie sind „exakt und allgemeingültig, und die geometrische Algebra lässt sich auf beliebige, auch irrationale Strecken anwenden“. ([1], Seite 207) Dies dürfte meiner Ansicht nach auch der Grund dafür gewesen sein, warum sich die Pythagoreer nicht nur mit den Zahlen, sondern auch mit der Geometrie beschäftigten.

2.4 Entdeckung des Irrationalen

Hippasos von Metapont gilt als erster Entdecker des Irrationalen. Er stellte Untersuchungen am regelmäßigen Fünfeck an, wobei er das Verhältnis zwischen der Diagonale und der Seite bestimmen wollte. Dabei verwendetet er das Verfahren der Wechselwegnahme:
Man zieht von zwei verschiedenen Größen die kleinere so oft wie möglich von

der größeren ab; mit dem Rest der kleineren Größe macht man es genauso. Auf diese weise erhält man das größte gemeinsame Maß zweier gerader Linien bzw. den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen. Gibt es einen größten gemeinsamen Teiler zwischen zwei Größen, dann bricht das Verfahren beim erreichen dieses Teilers ab. Die beiden untersuchten Größen sind damit vergleichbar; man sagt sie sind kommensurabel.
Die Wechselwegnahme war schon Jahrhunderte zuvor den Handwerkern als Faustregel bekannt, die diese Methode mit Messstöcken und Messschnüren angewandt hatten. Unter Zuhilfenahme dieser Mittel lässt sich jedoch nicht die Inkommensurabilität zweier Größen ermitteln. Zwei Größen sind nämlich dann inkommensurabel, wenn die Wechselwegnahme ins Unendliche fortgeführt werden kann. Bei seinen Untersuchungen am regelmäßigen Fünfeck, dem Pentagramm (siehe Abbildung 2.1), stellte Hippasos von Metapont genau dies fest:
Er betrachtete dabei das Verhältnis zwischen Diagonale und Seite. Zeichnet man alle Diagonalen des Fünfecks ein, so stellt man fest, dass diese ein weiteres, ebenfalls regelmäßiges Fünfeck bilden. Wenn man in dieses kleinere Fünfeck wieder die Diagonalen einzeichnet, so erhält man ein noch kleineres, aber wiederum regelmäßiges Fünfeck. Es zeigt sich also, dass man diese Prozedur ins Unendliche fortsetzen kann. Zieht man nun von einer Diagonale des ursprünglichen Fünfecks die anliegende Seite ab, erkennt man, dass der Rest der Länge einer Diagonale des kleineren Fünfecks entspricht.[4] Gleichzeitig erkennt man, dass man durch Subtraktion des Restes von der Seite des Ausgangsfünfecks die Länge einer Seite des kleineren Fünfecks erhält.[5] Nun hat man also die Länge einer Diagonale und einer Seite des kleineren Fünfecks. Auf die gleiche Art und Weise kommt man zu der Diagonalen und zur Seite des nächst kleineren Fünfecks. Da es eine unendlich große Zahl an immer kleineren regelmäßigen Fünfecken gibt, setzt sich auch die Methode der Wechselwegnahme ins Unendliche fort. Das bedeutet, dass „kein größtes gemeinsames Maß der Diagonale und der Seite des regelmäßigen Fünfecks gefunden werden kann“.

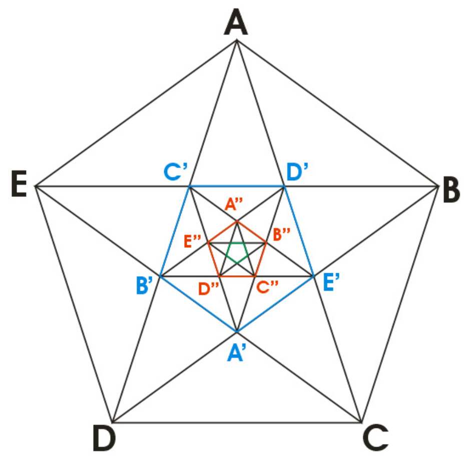

Abbildung 2.1: Ein Pentagramm (Sternfünfeck)

[4] $\overline{AE} = \overline{AB'}$ und $\overline{B'D} = \overline{B'E'} \Rightarrow \overline{AD} - \overline{AE} = \overline{B'E}$ ([1], Seite 296)
[5] $\overline{AE} = \overline{ED'} = \overline{EA'}$ und $\overline{B'E'} = \overline{B'D} = \overline{B'E} \Rightarrow \overline{AE} - \overline{B'E'} = \overline{B'A}$ ([1], Seite 296)

([1], Seite 296). Damit sind die beiden Größen „Seite“ und „Diagonale“ des Pentagramms inkommensurabel, das heißt man kann ihr Verhältnis nicht durch zwei ganze Zahlen ausdrücken. Hier zeigt sich, dass es nicht nur rationale, also Brüche von ganzen Zahlen, sondern auch irrationale Zahlen geben muss.

2.5 Weitere Entdeckungen

Die Pythagoreer haben noch einige andere Entdeckungen gemacht, die im Folgenden kurz erwähnt werden sollen.

Sie stellten fest, dass man Quadratzahlen aus einer Summe von ungeraden Zahlen darstellen kann. Als Formel hierfür gilt: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

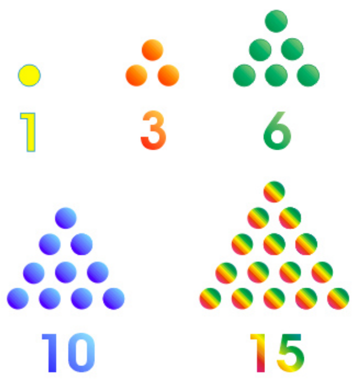

Abbildung 2.2: Darstellung verschiedener Dreieckszahlen

Weiterhin fanden sie heraus, dass Dreieckszahlen - das sind Zahlen, die durch ein Dreiecksmuster dargestellt werden können (siehe Abbildung 2.5) - die einfachste arithmetische Reihe darstellen: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. (Eine Reihe entsteht dadurch, dass man die Glieder einer Zahlenfolge zusammenzählt.)
Man kann die Summe gerader Zahlen auch als ein Produkt von zwei Zahlenpaaren von der Differenz 1 darstellen ([5], Seite 2). Die entsprechende Formel lautet: $2+4+6+\ldots+(2n)=n\cdot(n+1)$.
Sie entdeckten die „Harmonische Proportion“. Proportion ist zum einen die Bezeichnung „für das Verhältnis zweier Zahlen oder Größen“, zum anderen aber auch die Bezeichnung „für eine Verhältnisgleichung“ ([6], Seite 353). Letzteres trifft hier zu: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$. Diese „Harmonische Proportion“ kann man beim Verhältnis der Flächen ($a=6$), Ecken ($b=8$) und Kanten ($c=12$) des Würfels betrachten. Also: $\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{24}=\frac{1}{24}$.
Des weiteren führten sie den Begriff der „befreundeten Zahlen“ , bzw. „verwandten Zahlen“ ein: um zu erkennen, ob zwei Zahlen befreundet sind, muß man sich die Teiler der Zahlen anschauen. Zahlenbeispiel: 220 und 284.
Teiler von 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 und natürlich 220 selbst.
Teiler von 284: 1, 2, 4, 71, 142 und 284.
Zählt man nun die Teiler, die von der ursprünglichen Zahl unterschiedlich sind, zusammen, dann erhält man - wenn die Zahlen verwandt sind - als

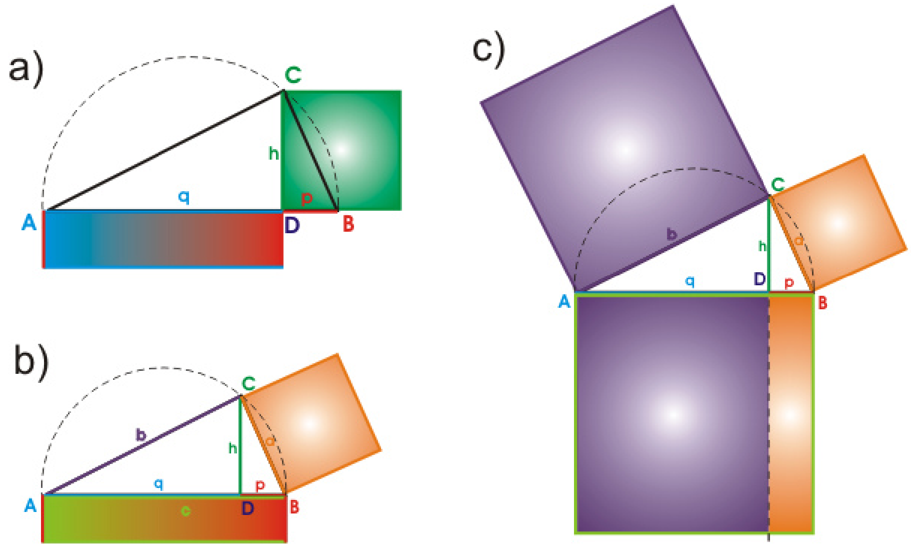

Abbildung 2.3: Satzgruppe des Pythagoras

Ergebnis die jeweils andere Zahl: $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$ und $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.
Schließlich behandelten sie noch die Auflösung von linearen Gleichungen mit n Unbekannten.

2.6 Satzgruppe des Pythagoras

Zum Schluss soll hier noch die wohl bekannteste Erkenntnis der Pythagoreer erläutert werden, die sogenannte „Satzgruppe des Pythagoras".

Ausgangspunkt ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Höhe CD. Diese Höhe zerlegt nun dieses Dreieck „in zwei Teildreiecke, die zueinander und zum ganzen Dreieck ähnlich sind." ([7], Seite 81) (siehe Abbildung 2.3, a)).
Die Dreiecke ADC und CDB sind also ähnlich.
Es ergibt sich folgende Gleichung: $\overline{AD} : \overline{CD} = \overline{CD} : \overline{BD}$ bzw. $q : h = h : p$. Man teilt also immer die größere Seite durch die kleinere. Andere Schreibweise: $\frac{q}{h} = \frac{h}{p}$. Multipliziert man die Gleichung mit h und p, so erhält man: $\underline{h^2 = p \cdot q}$.
Betrachtet man „h^2 als Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge h und $p \cdot q$ als Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen p und q" ([7], Seite 81), so erhält man den Höhensatz:
Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist inhaltsgleich

dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten. ([7], Seite 81)

Als nächstes betrachtet man die ähnlichen Dreiecke ABC und ACD bzw. die Dreiecke ABC und BCD (siehe Abbildung 2.3, b)). Man erhält: $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD}$ bzw. $\frac{c}{b} = \frac{b}{q}$. Mit b und q multipliziert hat man also: $\underline{b^2 = c \cdot q}$.
Desweiteren hat man die Proportion: $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{BD}$ bzw. $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}$.
Nun multipliziert man mit a und p und hat als Ergebnis: $\underline{a^2 = c \cdot p}$.
Auch hier deutet man wieder b^2 bzw. a^2 als Flächeninhalte von Quadraten mit der Seitenlänge b bzw. a und $c \cdot q$ bzw. $c \cdot p$ als Flächeninhalte von Rechtecken mit den Seitenlängen c und q bzw. c und p. So kommt man zum Kathetensatz:
Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist inhaltsgleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt. ([7], Seite 82)

Addiert man die beiden Gleichungen $\underline{a^2 = c \cdot p}$ und $\underline{b^2 = c \cdot q}$ erhält man: $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) = c^2$ also:

$a^2 + b^2 = c^2$ (siehe Abbildung 2.3, c)).

Wiederum werden a^2, b^2 und c^2 als Flächeninhalte von Quadraten mit den Seiten a, b und c angesehen. Es ergibt sich der Hypotenusensatz:

Die Quadrate über den beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ergeben zusammen den Inhalt des Hypotenusenquadrats. ([7], Seite 82)

Kapitel 3

Euklid

3.1 Leben und Wirken Euklids

Euklid lebte von ca. 365 bis ca. 300 v. Chr. Man nimmt an, daß er in Athen von den Schülern Platons erzogen wurde. In Alexandria lehrte er Geometrie und gründete eine Schule für Mathematik.
Ihm werden verschiedene Entdeckungen aus dem Bereich der Zahlentheorie zugeschrieben. Bei manchen Werken, die bisher Euklid zugeschrieben wurden, sind die Historiker der Ansicht, dass diese Zuschreibung nicht gerechtfertigt ist. Dies gilt zum Beispiel für die Werke „*Data*, eine Sammlung geometrischer Theoreme[1] , *Phenomena*, eine Beschreibung des Himmels, *Optik* [und] die *Einteilung der Tonleiter*, eine mathematische Diskussion über die Musik" ([4], Euklid).
Auch bei vielen anderen Werken sind sich die Historiker nicht einig, jedoch gilt als gesichert, dass das Werk „die Elemente" von Euklid stammt.

3.2 Die Elemente

3.2.1 Allgemeines

Die *Elemente* sind das Hauptwerk Euklids. Dieses Werk stellt eine Abhandlung über die Mathematik dar und umfasst 13 Bände. Es wird vermutet, dass Euklid bei den geometrischen Abschnitten in diesem Werk die Arbeiten älterer Mathematiker herangezogen und sie neu angeordnet hat.

Man kann die 13 Bücher dieses Werkes in drei Kategorien aufteilen:

[1] Theorem: Dies ist eine andere Bezeichnung für einen mathematischen Satz, also eine „wahre Aussage über einen mathematischen Sachverhalt" ([6],Seite 384).

- die ersten sechs Bücher bezeichnet man als die planimetrischen[2], allerdings trifft dieser Name eigentlich nur auf die Bücher I, III, IV und VI zu;
- die Bücher VII bis X werden als die arithmetischen,
- die Bücher XI bis XIII als die stereometrischen bezeichnet.

Generell kann man sagen, Euklid versucht in diesem Werk „alle geometrischen Sachverhalte aus Postulaten oder Axiomen herzuleiten." ([6], Seite 164) „Ein Postulat [ist] ein speziell geometrischer Grundsatz, der die Möglichkeit einer Konstruktion, die Existenz eines Gebildes sicherstellen soll; ein [für wahr gehaltenes] Axiom [...] ist ein allgemein logischer Grundsatz, den kein Vernünftiger, auch wenn er von Geometrie nichts weiß, bestreitet.“ ([2], Seite 419)
Postulate und Axiome sind nur im ersten Buch zu finden, bei den restlichen Büchern folgen üblicherweise nach den Definitionen gleich die Propositionen. Letzteres sind teilweise Aufgaben, teilweise Lehrsätze. Euklids Interesse richtet sich hauptsächlich „auf den in ihrer Lösung liegenden Existenzbeweis“ ([2], Seite 420). Nach Prokles sind die wesentlichen Bestandteile einer Proposition folgende:

1. „die allgemeine Vorlage selbst (Protasis), Lehrsatz oder Aufgabe;
2. das speziell Gegebene (Ekthesis), die Voraussetzung;
3. das speziell Geforderte (Diorismos), die Behauptung;
4. die Konstruktion (Katasheue);
5. der Beweis (Apodeixis);
6. die auf die Vorlage zurückgreifende Schlußzusammenfassung (Symperasma).“ ([2], Seite 420)

Zwar können auch einzelne Teile fehlen, jedoch werden in der Regel alle Punkte aufgeführt.

[2]Planimetrie ist die ebene Geometrie, das heißt man untersucht geometrische Eigenschaften in der Ebene. Im Gegensatz dazu steht die räumliche Geometrie, auch Stereometrie genannt. ([6], Seite 164)

3.2.2 Bücher I bis VI

Buch I beginnt mit grundlegenden Definitionen, allerdings wird hier von Euklid „die Anschauung schon vorausgesetzt“. ([2], Seite 417) So lautet die erste Definition: „Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.“ ([2], Seite 1) Wenn man nicht schon eine Vorstellung davon hat, was man unter einem Punkt zu verstehen hat, wird man mit dieser Definition nichts anzufangen wissen. „Euklid will höchstens abgrenzen, was an sich bereits existiert“, wobei er allerdings nur „einzelne Merkmale hervorhebt“ ([2], Seite 417). Bei dieser Definition ist es die Unteilbarkeit des Punktes.
In gleicher Weise werden unter anderem die Begriffe Linie, Strecke, Fläche, Winkel, Kreis, etc. definiert. Danach folgen Postulate und Axiome, auf die das gesamte Werk aufbaut. Schließlich folgen 48 Sätze, die sich in drei Bereiche untergliedern lassen:

- „§ 1-26 Kongruenzlehre, Fundamentalkonstruktionen und Verwandtes,
- § 27-32 Parallelentheorie,
- § 33-48 die Hauptsätze über das Parallelogramm und die Lehre von der Flächengleichheit“ ([2], Seite 417).

In **Buch II** wird die geometrische Algebra behandelt. Hierbei geht es um „allgemeinere Größenbeziehungen“ ([2], Seite 425), die durch Formeln ausgedrückt werden. Ziel ist es, unbekannte Größen aus bekannten zu bestimmen.

Buch III handelt von der Kreislehre. Die Definitionen legen fest, wann zwei Kreise gleich sind, wann eine Linie eine Tangente ist, was ein Kreisabschnitt ist, was ein Kreisausschnitt ist und dergleichen mehr ([2], Seite 45). In den Paragraphen werden nun verschiedene Sachverhalte bewiesen, wie zum Beispiel: „Ein Kreis kann einen Kreis nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.“ ([2], Seite 53, § 10)

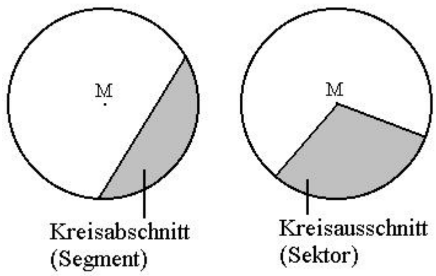

Abbildung 3.1: Kreissegment und Kreissektor

In **Buch IV** geht es um regelmäßige Vielecke. Der Inhalt dieses Buches wird als pythagoreisch angesehen.

„**Buch V** gibt die strenge Begründung einer Proportionslehre allgemeiner Größen.“ ([2], Seite 429)

Zum historischen Hintergrund:
Wie schon im Abschnitt „Die Pythagoreer“ erwähnt versuchen die Griechen „geometrische Probleme [. . .] mit Hilfe von Proportionen“ ([2], Seite 429) darzustellen. Dieses Verfahren konnte durch die Entdeckung des Irrationalen nicht länger aufrechterhalten werden. Man mußte versuchen, „die wesentlichen elementaren geometrischen Sätze ohne Proportionen herzuleiten“ ([2], Seite 430). Durch die Erweiterung der Flächenlehre wurde dies bewerkstelligt. Ein Beispiel hierfür ist der Euklidische Beweis des Pythagoras.

Die geometrische Anwendung des vorherigen wird in **Buch VI** aufgeführt. Desweiteren behandelt es „die Ähnlichkeitslehre und die allgemeine Flächenanlegung“ ([2], Seite 434).

3.2.3 Bücher VII bis X

In der ersten Hälfte (bis § 19) von **Buch VII** geht es um „die Grundlegung der Lehre von den Zahlenverhältnissen, die zweite behandelt die Teilbarkeit“ ([2], Seite 439).

Die geometrischen Reihen werden in **Buch VIII** und in der ersten Hälfte von **Buch IX** hauptsächlich behandelt. Es wird die Lehre von den Potenzen und die Lehre von den rationalen Wurzeln gebracht.

Die Sätze 21-34 am Ende des **IX. Buches** stellen eine „Lehre von Geraden und Ungeraden“ dar ([1], Seite 125). Dieses Satzgefüge kann man als „den Anfang einer Theorie der Kongruenzen modulo 2 (z. T. auch mod 4 und mod 8)“ ([1], Seite 128) bezeichnen: In den Sätzen 21-27 sind die Ergebnisse der Addition und Subtraktion, in den Sätzen 28-29 der Multiplikation von geraden bzw. ungeraden Zahlen angegeben. Die Sätze 30-31 sind wichtige Hilfssätze über die ungerade Zahl als Teiler. Schließlich zeigen die Sätze 32-34, dass die „Einteilung der geraden Zahlen in lediglich292 gerademalgerade, lediglich ungerademalgerade und in gemischte“ ([1], Seite 128) wirklich Zahlen enthält.

Euklid behandelt in **Buch X** die „bei Konstruktionen auf Grund der Postulate auftretenden irrationalen Strecken“ ([2], Seite 446). Diese Abhandlung soll „ein Fundament“ für „das Ziel [...] des ganzen Werkes, die Theorie der regulären Körper,“ bilden ([2], Seite 446).

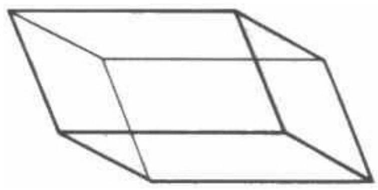

Abbildung 3.2: Parallelflach

In den Propositionen 1-18 „werden allgemeine Untersuchungen über Kommensurabilität durchgeführt“ ([2], Seite 447). Wichtig sind §§ 9, 17 und 18, da hier die Einzelergebnisse zusammengefaßt werden. §9 enthält die Rationalitätsbedingung der Quadratwurzel, und §§ 17, 18 handeln von der „Rationalität der Wurzeln einer dreigliedrigen quadratischen Gleichung“ ([2], Seite 447).
Die Propositionen 19-111a bilden den Hauptteil. Die §§ 19-26 handeln von Rechtecken mit rationalen Seiten und von den Strecken, die quadriert diese Art von Flächen ergeben. Alle bisherigen Abschnitte machen für den mathematisch Gebildeten nur wenige Schwierigkeiten. Anders verhält es sich jedoch bei den nun folgenden. Die Konstruktionen der §§ 27-35 gelten als „ganz besonders undurchsichtig“ ([2], Seite 447). Allerdings dienen sie nur als Existenzbeweis der im Folgenden eingeführten Größen. Der Rest des Hauptteils behandelt verschiedene Formen von Strecken, wobei es 12 Hauptformen und 12 Hilfsformen gibt. Die 12 Hauptformen sind in §§ 36-41 und §§ 73-78 definiert, die 12 Hilfsformen in „Zweite und Dritte Definitionsgruppe, §§ 47a, 84a“ ([2], Seite 448). Zur Zusammenfassung dienen 72a, 111 und 111a. Ob der nun folgende letzte Teil des Buches X von Euklid ist, ist zweifelhaft. Er beinhaltet „die Vorschrift für das Rationalmachen zweigliedriger Nenner“ ([2], Seite 450) (§§ 112-114). § 115 dient als Beispiel „für die Möglichkeit, über die gesteckten Grenzen hinauszugehen“ ([2], Seite 450). § 115a ist zwar nicht von Euklid, er ist jedoch als „voreuklidischer Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$“ wichtig ([2], Seite 450).

3.2.4 Bücher XI bis XIII

Buch XI, das erste stereometrische Buch, definiert zuerst mehrere neue Begriffe. Sodann wird untersucht, welche Lagebeziehungen es „zwischen den Grundgebilden Gerade und Ebene“ gibt (§§ 1-19) ([2], Seite 463). In den darauf folgenden Sätzen und Aufgaben wird die dreiseitige körperliche Ecke betrachtet (§§ 20-23, 26, 35). Es folgen weitere Sätze und Aufgaben über

Abbildung 3.3: Dodekaeder, Oktaeder und Ikosaeder

Parallelflache[3] , vor allem über deren Rauminhalt (§§ 24, 25, 27-34, 36,37). Schließlich folgen noch zwei Hilfssätze, die aber erst für die späteren Bücher wichtig sind.
Da das nach dem Parallelflach folgende allgemeine Prisma keine weiteren Schwierigkeiten macht, ist die Lehre vom Rauminhalt abgeschlossen, solange keine Infinitesimalbetrachtungen[4] nötig sind. Letzteren ist das **Buch XII** gewidmet. In ihm wird auch der „Satz über das Verhältnis von Kreisflächen nachgeholt“ ([2], Seite 463), jedoch fehlt die Berechnung des Kugelvolumens ebenso, wie „die Vergleichung der Oberflächen“ ([2], Seite 468). Beides wird erst von Archimedes geliefert. Bei den Sätzen XII, 2, 5, 10, 11, 12 geht es um folgendes: Das Verhältnis zweier irrationaler Größen X, Y soll dem Verhältnis elementarer Größen gleich sein.

Das **Buch XIII** entwickelt zuerst „eine Reihe Größenbeziehungen an stetig geteilten Strecken und am Fünfeck“ ([2], Seite 463) und fährt fort mit der Konstruktion der regelmäßigen Körper. Es werden die fünf platonischen Körper konstruiert, „die aber nicht von ihm stammen“ ([2], Seite 471). Die drei Körper Würfel, Pyramide und Dodekaeder[5] sind von den Pythagoreern, die restlichen beiden Körper Oktaeder[6] und Ikosaeder[7] gehören dem Theaitetos. Platonisch werden sie genannt, weil Platon sie im Timaios genannt hat(siehe auch Abbildung 3.3).

[3]Ein Parallelflach ist ein „Körper, dessen Oberfläche von sechs Parallelogrammen gebildet wird, von denen je zwei kongruent sind und in parallelen Ebenen liegen.“([6], S. 329; siehe auch Abbildung 3.2)
[4]Infinitesimalrechnung ist ein anderer Begriff für Differential- und Integralrechnung.
[5]Ein Dodekaeder ist ein regelmäßiger Körper, der aus 12 kongruenten Flächen (regelmäßige Fünfecke) zusammengesetzt ist.
[6]Der Oktaeder ist ein regelmäßiger Körper; er besteht aus 8 dreieckigen Flächen.
[7]Der Ikosaeder ist ein regelmäßiger Körper; er besteht aus 20 dreieckigen Flächen.

3.2.5 Angefügte Bücher XIV und XV

Die **Bücher XIV** und **XV** stammen nicht von Euklid und wurden erst später den Elementen hinzugefügt.

Buch XIV stammt von Hypsikles (um 150 v. Chr.), der sich über 100 Jahre später mit dem Verhältnis der Oberflächen und Volumina von Dodekaeder und Ikosaeder beschäftigte. In diesem Buch weist er nach, daß sich die Oberflächen und Volumina dieser Körper „zueinander Verhalten wie die Würfelkante und Ikosaederkante“ ([2], Seite 476).

Schließlich ist da noch **Buch XV**, das verschiedene Verfasser hat und wesentlich später entstanden ist. Hauptsächlich beschäftigt es sich „mit trivialen Einzeichnungen eines regelmäßigen Körpers in den anderen“ und mit der „Aufzählung von Kanten und Ecken“ ([2], Seite 477).

Kapitel 4

Archimedes

4.1 Leben und Wirken des Archimedes

Archimedes wurde um 287 v. Chr. in Syrakus auf Sizilien geboren und verbrachte dort auch den größten Teil seines Lebens. Von diesem ist, außer den mathematischen und physikalischen[1] Errungenschaften, nicht viel bekannt. Viele Geschichten über ihn dürften nur Legenden sein, jedoch weiß man, dass er, um die von den Römern belagerte Stadt Syrakus zu befreien, Steinschleudern bzw. Katapulte erfunden hat. Er starb 212 v. Chr. während der römischen Eroberung von Syrakus im 2. punischen Krieg. Zu seinen erhalten gebliebenen Werken gehören:
„Über Spiralen“, „Kugel und Zylinder“, „Die Quadratur der Parabel“, „Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen“, „Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide“, „Über schwimmende Körper“, „Die Sandzahl“ und „Kreismessung“.

4.2 Werke

4.2.1 Buch „Über Spiralen“

Archimedes definiert eine Spirale wie folgt: Ein Halbstrahl (unsere heutige Bezeichnung dafür ist die Halbgerade) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit um seinen Endpunkt innerhalb einer Ebene, bis er in seine Ausgangsstellung zurückkehrt (Archimedes nennt diese Ausgangsstellung „Leitlinie“). Gleichzeitig bewegt sich ein Punkt auf der Halbgeraden vom Endpunkt aus

[1] Dazu gehören: Hebelgesetze, grundlegende Gesetze der Hydrostatik, die Erfindung des Flaschenzuges und die Erfindung der Wasserschnecke.

mit ebenfalls konstanter Geschwindigkeit. Die Linie, auf der sich der Punkt in der Ebene bewegt, ist eine Spirale.
Das Buch besteht aus 28 Sätzen, wobei die ersten 17 Sätze hauptsächlich nur Hilfssätze sind oder nur dazu dienen, die folgenden Sätze zu beweisen. Die restlichen Sätze 18 bis 28 kann man in zwei Kategorien unterteilen: Differentialsätze (18-20) und Integralsätze (21-28).
Die Sätze 18 bis 20 kann man wie folgt zusammenfassen: „Die Subtangente der Spirale ist gleich dem Produkte aus dem Radius Vektor und der Anomalie.“ ([3], Seite 62) Zur Veranschaulichung (siehe Abbildung 4.1): Man hat also einen Punkt P der Spirale in Polarkoordinaten, das heißt er ist durch seinen Abstand r vom Ursprung O (dem sogenannten Pol) und dem Winkel ω zwischen [OP] und der X-Achse definiert. (Dieser Winkel wird auch Anomalie genannt.) Der Schnittpunkt der Tangente in P mit der X-Achse sei P”. Die Projektion des Tangentenabschnittes [PP”] auf die X-Achse ist die Subtangente.

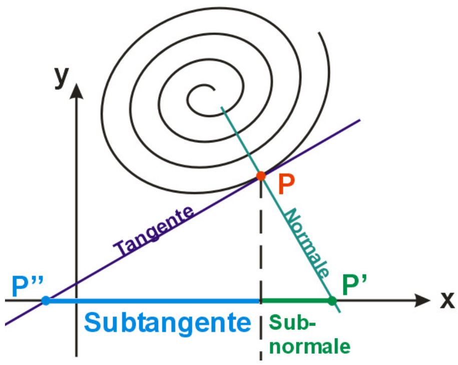

Abbildung 4.1: Subnormale und Subtangente

Mit den Sätzen 21 bis 23 wird die Integrabilität bewiesen; in den Sätzen 24 bis 28 wird die Integration ausgeführt.

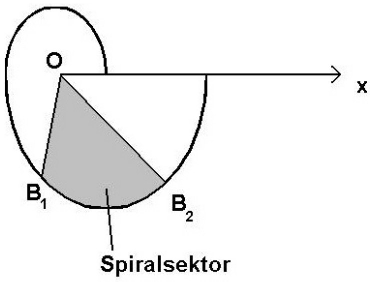

Abbildung 4.2: Spiralsektor (Skizze)

Die Sätze 24 bis 28 behandeln die Bestimmung des Flächeninhaltes eines Spiralsektors, also eines Teils der Spirale. Zum Beispiel (siehe Abbildung 4.2):
Bogen-Endpunkte: B_1 $(r_1;\omega_1)$, B_2 $(r_2;\omega_2)$

Somit ist das Ergebnis des Buches „Über Spiralen“ folgende Formel, mit der man den Inhalt des Spiralsektors berechnen kann: Flächeninhalt $= \frac{1}{3} \cdot (\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2)$.

4.2.2 Buch „Kugel und Zylinder“

In diesem Buch beschäftigt sich Archimedes mit der „Berechnung der Oberfläche und des Inhalts der Kugel und des Kugelsegments, sowie des Kugelsektors“. ([3], Seite 75). Ein Kugelsegment, auch Kugelabschnitt genannt, erhält man, indem man die Kugel mit Hilfe einer Ebene zerschneidet.

„Ergänzt man einen Kugelabschnitt über seinem Grundkreis durch einen Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, so entsteht ein Kugelausschnitt (Kugelsektor).“ ([6], Seite 258).
Dieses Werk des Archimedes besteht aus zwei Teilen, wobei er im zweiten Teil Anwendungen nennt und Aufgaben gibt. Der Leitgedanke dieses Werkes ist, daß man die Kugel in Elementarkegel zerlegen muß. Die Spitze der Kegel ist der Mittelpunkt der Kugel. Daß es allerdings nicht zur Art des Archimedes gehört, den Leitgedanken in den Vordergrund zu stellen, und „er nur ihm selbst als Schlüssel der Beweisfindung“ ([3], Seite 75) dient, wird in der Einleitung zu diesem Werk des Archimedes gezeigt. Um dies aufzuzeigen, wird hier, ausgehend vom Leitgedanken, der Gedankengang Archimedes rückwärts durchlaufen. Durch ihn ergibt sich die Möglichkeit „aus der Oberfläche der Kugel auf ihren Inhalt, bzw. von der Kalotte[2] auf den Inhalt des Sektors und damit auf den Inhalt des Segments zu schließen“. ([3], Seite 76)
Archimedes muss also die Oberfläche der Kugel bestimmen. Für die hierfür nötige Integration schließt er das Integral in Grenzen ein, indem er „der Kugel einen Körper um- und einen anderen einbeschreibt“ ([3], Seite 75). Hierfür wählt er Rotationskörper von regelmäßigen Vielecken. Dieses Verfahren, einem Körper andere regelmäßige Körper um- und einzubeschreiben, auf die Ebene angewandt, benützt Archimedes, um die Kreiszahl Pi (π) zu bestimmen (siehe auch 4.2.6 Kreismessung).

4.2.3 Buch „Die Quadratur der Parabel“

Man geht in diesem Werk von folgendem Problem aus: zu einem gegebenen Kreis oder Kreissegment soll eine geradlinig begrenzte Fläche konstruiert werden, die zu ersterem flächengleich ist. Man versuchte dann dasselbe für ein Ellipsensegment zu zeigen, wobei man allerdings Hilfssätze verwendete, deren Richtigkeit nicht bewiesen war. Deswegen glaubten die meisten, diese Probleme seinen nicht gelöst. Archimedes zeigt nun, durch Quadrieren der Fläche eines Parabelsegments, dass „der Inhalt jedes Parabelsegments um ein Drittel größer ist als das Dreieck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat“ ([3], Seite 153).

[2]Kalotte ist der „zur Kugeloberfläche [gehörende] Teil eines Kugelabschnitts” ([6], Seite 258)

4.2.4 Buch „Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide“

Paraboloid

Ein Paraboloid ist eine Rotationsfigur, die dadurch entsteht, daß eine Parabel um ihre Achse rotiert. Ein Paraboloid-Segment entsteht durch zwei parallele Ebenen, wobei die eine das Paraboloid berührt und die andere das Paraboloid schneidet. Die Basis des Segments ist „das Flächenstück, das in der schneidenden Ebene durch die Fläche des Paraboloids begrenzt wird“. ([3], Seite 213)

Es geht nun um den Beweis, dass wenn die Basis eines Paraboloid-Segments senkrecht auf der Rotationsachse steht, der Inhalt des Segments $1\frac{1}{2}$ mal so groß ist, wie ein Kegel mit gleicher Grundfläche und Höhe. Des weiteren geht es um den Beweis, dass „die Inhalte beliebiger Segmente desselben Paraboloids [sich so verhalten] wie die Quadrate ihrer Achsen“ ([3], Seite 213).

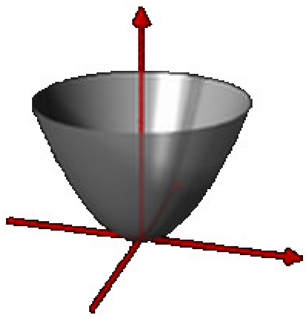

Abbildung 4.3: Paraboloid

Hyperboloid

Ausgangspunkt ist eine Hyperbel in einer Ebene. Lässt man nun die Hyperbel um ihre Hauptachse rotieren, so nennt man die sich daraus ergebende Figur ein Hyperboloid. Ein Hyperboloid-Segment ist ebenso definiert, wie ein Paraboloid-Segment.

Nun handelt es sich unter anderem um folgenden Beweis: Steht die Grundebene eines Hyperboloid-Segments auf der Rotationsachse senkrecht, dann „verhält sich der Inhalt des Segments zum Inhalt des Kegels von gleicher Grundfläche und Höhe wie die Summe, gebildet aus der Achse des Segments und der dreifachen Achsenergänzung, zu der Summe, gebildet aus der Achse des Segments und der doppelten Achsenergänzung“. ([3], Seite 214)

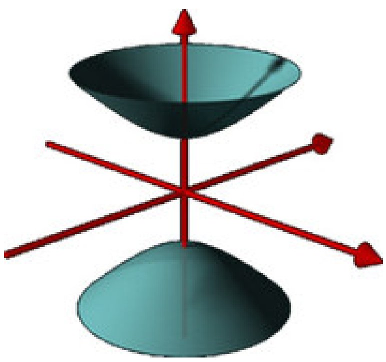

Abbildung 4.4: Zweischaliges Hyperboloid

Ellipsoid

Es werden zwei verschiedene Arten von Ellipsoiden genannt: Wenn sich eine Ellipse um ihre große Achse dreht, wird die Rotationsfigur ein verlängertes Ellipsoid genannt, dreht sich die Ellipse um ihre kleine Achse, wird die Rotationsfigur ein abgeflachtes Ellipsoid genannt. Anders als beim Paraboloid und beim Hyperboloid werden hier drei Ebenen verwendet, um Ellipsoid-Segmente zu bekommen. Alle drei Ebenen sind parallel, wobei zwei Ebenen das Ellipsoid berühren und die dritte das Ellipsoid schneidet. Die Basis der Segmente heißt „das Flächenstück, das in der schneidenden Ebene durch die Fläche des Ellipsoid begrenzt wird". ([3], Seite 215)

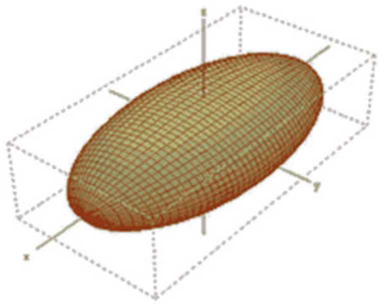

Abbildung 4.5: Ellipsoid

Es geht nun um folgende Beweise: Wenn die Grundfläche zweier Ellipsoid-Segmente senkrecht zur Achse des Ellipsoids ist und durch den Mittelpunkt geht, ist jedes Segment doppelt so groß wie ein Kegel mit gleicher Grundfläche und Höhe. Anders ist es, wenn die Grundfläche zwar immer noch senkrecht zur Achse des Ellipsoids steht, sie jedoch nicht mehr durch den Mittelpunkt geht. Wenn dem so ist, dann „hat das größere Segment zum Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe dasselbe Verhältnis wie die Summe, gebildet aus der halben Achse des Ellipsoids und der Achse des kleineren Segments, zur Achse des kleineren Segments, andererseits hat [dann] das kleinere Segment zum Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe dasselbe Verhältnis wie die Summe, gebildet aus der halben Achse des Ellipsoids und der Achse des größeren Segments, zur Achse des größeren Segments". ([3], Seite 215)

4.2.5 Buch „Die Sandzahl"

Es geht hier um das Problem, wie groß die Zahl der Sandkörner ist. Archimedes listet hier zuerst einige Meinungen seiner damaligen Zeit auf. So glaubten anscheinend viele, es gebe unendlich viele Sandkörner, wohingegen andere wiederum meinten, die Zahl der Sandkörner sei zwar nicht unendlich, jedoch gäbe es keine Zahl, die größer ist als die Anzahl der Sandkörner. Archimedes zeigt nun, unter Zuhilfenahme geometrischer Beweise, dass es sogar etliche Zahlen gibt die größer sind. Dabei führt er das Bild einer Kugel ein, die die Größe der Erde hat und völlig aus Sand besteht, wobei auch die Meere und alle Täler der Erdkugel bis zu den Gipfeln der Berge mit Sand ausgefüllt wären. Jedoch will Archimedes nicht nur eine Zahl finden, die „die Zahl der Sandkörner in jener der Erdkugel gleichen Kugel“ übertrifft, „sondern auch die Zahl der Sandkörner in einer Kugel, die so groß ist wie der Kosmos“. ([3], Seite 349). Natürlich findet er auch eine: 10^{68} ([3], Seite 364). Interessant scheint mir hier noch das zu sein, was Archimedes und seine Zeitgenossen unter dem Begriff „Kosmos“ verstanden: sie bezeichnen damit die Kugel, „deren Zentrum der Mittelpunkt der Erde und deren Radius die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Erde und der Sonne ist“. ([3], Seite 349).

4.2.6 Kreismessung

Anhand der Kreismessung gelingt es Archimedes zum ersten mal in der Geschichte der Mathematik die Kreiszahl Pi (π) zwischen rationale Schranken einzuweisen: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Er bewies als erster, dass „die Flächenbestimmung des Kreises und die Bestimmung des Kreisumfanges äquivalente Probleme sind“ ([6], Seite 256).
In seinem ersten Satz zeigt er, dass ein Kreis und ein rechtwinkliges Dreieck inhaltsgleich sind, wenn der Radius des Kreises dieselbe Länge hat wie eine der Katheten, und wenn der Umfang gleich der Hypothenuse (Archimedes nennt sie Basis) ist. Der zweite Satz behauptet, dass das Verhältnis von der Fläche des Kreises zum Quadrat seines Durchmessers 11 zu 14 ist.
Mit Hilfe des dritten und letzten Satzes schließt Archimedes π zwischen zwei Grenzen ein, indem er einem Kreis ein Polygon von 96 Seiten einbeschreibt und ein weiteres Polygon von ebenfalls 96 Seiten umbeschreibt und jeweils den Umfang des Polygons bestimmt. Der Schlußsatz lautet: „Der Umfang des Kreises ist demnach dreimal so groß als der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als $\frac{1}{7}$, aber um mehr als $\frac{10}{71}$ desselben“. ([3], Seite 377).

Abbildungsverzeichnis

Bildquellen

- Abbildung 2.1: Nachgezeichnet nach [1], Seite 296;
- Abbildung 2.5: Nachgezeichnet nach [6], Seite 112;
- Abbildung 2.3: Nachgezeichnet nach [7], Seite 81 und Seite 82;
- Abbildung 3.1: eigene Skizze nach Definition von [6], Seite 253 und Seite 254;
- Abbildung 3.2: [6], Seite 329;
- Abbildung 3.3: Nach Original von [4], Polyeder";
- Abbildung 4.1: Nachgezeichnet nach [6], Seite 403;
- Abbildung 4.2: eigene Skizze nach Definition von [3], Seite 52, § 26;
- Abbildung 4.3: [8], Stichwort „Paraboloid";
- Abbildung 4.4: [8], Stichwort „Hyperboloid";
- Abbildung 4.5: [8], Stichwort „Ellipsoid";

Literaturverzeichnis

[1] „**Zur Geschichte der griechischen Mathematik**“, herausgegeben von Oskar Becker; Verlag: Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, unveränderte Teilauflage der ersten Auflage 1965; 1, 2, 3, 5, 6, 7, 13, 24

[2] „**Euklid / Die Elemente**“, herausgegeben von Clemens Thaer (Sonderausgabe); Verlag: Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 7. unveränderte Auflage 1980; 11, 12, 13, 14, 15, 16

[3] „**Archimedes / Werke**“ (Sonderausgabe); Verlag: Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 4. unveränderter reprografischer Nachdruck 1983; 18, 19, 20, 21, 22, 24

[4] „**Microsoft® Encarta® 98 Enzyklopädie**“ - CD Rom, (die Texte, aus denen die Zitate entnommen sind, sind unter den jeweils angegebenen Suchbegriffen zu finden); 1, 2, 3, 4, 10, 24

[5] „**Mathematik der griechischen Antike**“ von Johannes Pöckl. Zu finden im Internet unter http://www.fundus.org/referat.asp?ID=1945; Datei: ic1945.pdf, 1, 7

[6] „**Der kleine Duden Mathematik**“, herausgegeben von Meyers Lexikonredaktion; Verlag: Bibliographisches Institut F.A. Brockhaus AG, 2. Auflage 1996, ISBN 3-411-05352-6; 4, 7, 10, 11, 15, 19, 22, 24

[7] „**Mathematik, Geometrie 9. Schuljahr**“, von Johannes Kratz; Verlag: Bayerischer Schulbuch-Verlag, 2. Auflage 1989, ISBN 3-7627-3586-7; 8, 9, 24

[8] „**Wikipedia-DVD**“ (Premiumausgabe), Ausgabe 2007 / 2008, ISBN 978-3-86640-019-1, http://de.wikipedia.org. 24