Axel Günther
Claudius Knaak
Gruppe 7 (Dienstag)

7.1.02

Brückenschaltungen (BRÜ)

Aufgabe 1:
Abgleichbedingung:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Zu Abb. 6.a)

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + j\cdot\omega\cdot C_1$$

$$Z_2 = R_2 - j\cdot\frac{1}{\omega\cdot C_2}$$

$$Z_3 = R_3$$

$$Z_4 = R_4$$

All das in obige Gleichung eingesetzt gibt für die Realteile:

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}$$

Für die Imaginärteile muß gelten:

$$R_1 R_2 = \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}$$

Zu Abb. 6.b)

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} - j\cdot\frac{1}{\omega\cdot L_1}$$

$$Z_2 = R_2 + j\cdot\omega\cdot L_2$$

$$Z_3 = R_3$$

$$Z_4 = R_4$$

Das setzt man wieder in die Abgleichbedingung ein und erhält für die Realteile:

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{L_2}{L_1}$$

Für die Imaginärteile gilt:

$$R_1 R_2 = \omega^2 L_1 L_2$$

Aufgabe 2a:

Der zu bestimmende Widerstand (Gesamtlänge eines Potentiometers) hat einen angegebenen Wert von $R = 100\Omega \pm 1\Omega$. Das entspricht in der Skaleneinteilung: $L = 10 \pm 0{,}01$. Das zur Abgleichung verwendete Potentiometer ist identisch. Mit der Formel läßt sich der unbekannte Widerstand ausrechnen:

$$R_{?i} = \frac{R_{L-Xi}}{R_{Xi}} R_{Vi} = \frac{L - X_i}{X_i} R_{Vi} = \left(\frac{L}{X_i} - 1\right) R_{Vi}$$

=> $\overline{R}_{?1} = 101{,}1\Omega$

=> $\overline{R}_{?2} = 101{,}2\Omega$

=> $\overline{R}_{?3} = 101{,}2\Omega$

Jetzt muß man aber noch die Fehler berücksichtigen:

1.: $\Delta X = 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}03$ (das ist die Unsicherheit beim Strom Abgleichen und die Ableseungenauigkeit)

2.: $\Delta L = 0{,}01$ (das ist die Einstellunsicherheit des Potentiometers)

zusammenfügen tut man das mittels quadratischer Addition:

$$R_{?i} = \overline{R}_{?i} \pm \Delta\overline{R}_{?i} = \overline{R}_{?i} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\overline{X}_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{\overline{L}}\right)^2} \cdot \overline{R}_{?i}$$

=> $R_{?1} = 101{,}1\Omega \pm 3{,}4\Omega$

=> $R_{?2} = 101{,}2\Omega \pm 1{,}8\Omega$

=> $R_{?3} = 101{,}2\Omega \pm 0{,}62\Omega$

Die angegebene Toleranz des gemessenen Potentiometers ist kleiner als die gemessene. Das heißt unsere Meßwerte liegen außerhalb der erwarteten Grenze.

Aufgabe 2b:

Die Messung hierzu erfolgt ganz analog zur obigen. Mit der Formel $R_G = \frac{L - X}{X} R_V$ erhält man für den Widerstand der Glühbirne:

=> $\overline{R}_{G1} = 80{,}1\Omega$

=> $\overline{R}_{G2} = 74{,}3\Omega$

=> $\overline{R}_{G3} = 33{,}2\Omega$

=> $\overline{R}_{G} = 62{,}5\Omega$

mit den partiellen Ableitungen errechnet man den Fehler:

$$\frac{\partial R_G}{\partial L} = \frac{R_V}{X}$$

$$\frac{\partial R_G}{\partial X} = -\frac{R_V L}{X^2}$$

$$\frac{\partial R_G}{\partial R_V} = \frac{L - X}{X}$$

$$\Rightarrow \Delta\overline{R}_G = \sqrt{\Delta L^2 \left(\frac{\overline{R}_{Vi}}{\overline{X}_i}\right)^2 + \Delta X^2 \left(\frac{\overline{R}_{Vi}\overline{L}}{\overline{X}_i^{\,2}}\right)^2 + \Delta R_V^{\,2} \left(\frac{\overline{L} - \overline{X}_i}{\overline{X}_i^{\,2}}\right)^2}$$

=> $R_{G1} = 80{,}1\Omega \pm 0{,}82\Omega$

=> $R_{G2} = 74{,}3\Omega \pm 0{,}45\Omega$

=> $R_{G3} = 33{,}2\Omega \pm 0{,}22\Omega$

Aufgabe 2c:
Man kann auf den Diagrammen erkennen, daß mit steigendem Strom der Widerstand der Glühbirne zunimmt. *Erklärung:* Je höher der Strom, desto heißer wird die Glühwendel und desto stärker sind die Gitterschwingungen im Glühfaden. Die stärken Gitterschwingungen bilden also für den Strom aus Elektronen einen höheren Widerstand.

Wertetabelle zu 2c					
R = 10 Ohm					
U [V]	x	x in Ohm	L-x in Ohm	R-x [Ohm]	I [A]
0,5	2,84	28,4	71,6	25,2	0,014
1	2,15	21,5	78,5	36,5	0,022
2	1,38	13,8	86,2	62,5	0,028
3	1,1	11	89	80,9	0,033
4	0,96	9,6	90,4	94,2	0,038
5	0,85	8,5	91,5	107,6	0,043

R = 200 Ohm					
U [V]	x	x in Ohm	L-x in Ohm	R-x [Ohm]	I [A]
0,5	9,16	91,6	8,4	0,9	0,0025
1	9,15	91,5	8,5	0,9	0,0050
2	9,12	91,2	8,8	1,0	0,0100
3	9,04	90,4	9,6	1,1	0,0149
4	8,9	89	11	1,2	0,0199
5	8,65	86,5	13,5	1,6	0,0248

Aufgabe 3:
Die Berechnung des Widerstandes der Spulen erfolgt wie in Aufgabe 2a/b:
1.: Kupferdrahtspule
für die volle Windungszahl (N=250) erhalten wir: $R = 0{,}63\Omega \pm 0{,}001\Omega$
für die halbe Windungszahl (N=125): $R = 0{,}29\Omega \pm 0{,}001\Omega$
2.: unbekannte Induktivität
$R = 38{,}1\Omega \pm 0{,}37\Omega$

Die Unsicherheiten betragen (bei beiden): $\Delta\overline{R} = \frac{0{,}02}{\overline{X}}\overline{R}$

Aufgabe 4:
1a) Spule (volle Windungszahl):
Aus der Abgleichbedingung für die verwendete Schaltung:

$$\frac{R_{Lx} + i\omega L_x}{R_{Lk} + i\omega L_k + R_V} = \frac{L-X}{X}$$

erhält man für
den Realteil: $R_{Lx} X = (R_V + R_{Lk})(L-X)$

und für den Imaginärteil: $L_x = \frac{L_k(L-X)}{X}$

=> $\overline{L}_x = 0{,}0034H$

für die Fehlerbetrachtung kann man die partiellen Ableitungen bilden:

$$\frac{\partial L_x}{\partial L_k} = \frac{L - X}{X}$$
$$\frac{\partial L_x}{\partial L} = \frac{L_k}{X}$$
$$\frac{\partial L_x}{\partial X} = -\frac{L_k L}{X^2}$$
$$\Rightarrow \Delta\overline{L}_x = \sqrt{\Delta L_k{}^2\left(\frac{\overline{L} - \overline{X}}{\overline{X}}\right)^2 + \Delta L^2\left(\frac{\overline{L}_k}{\overline{X}}\right)^2 + \Delta X^2\left(\frac{\overline{L}_k \overline{L}}{\overline{X}^2}\right)^2} = 0{,}00015H$$
$$\Rightarrow L_x = 0{,}0034H \pm 0{,}00015H$$

1b) Spule (halbe Windungszahl):

Nach der Formel $L = \frac{\mu A N^2}{l}$ würde man die Induktivität ein viertel so groß wie die ursprüngliche erwarten. Benutzt man die gerade bestimmte unbekannte Induktivität, so läßt sich die Induktivität der halben Kupferdrahtspule ausrechnen:

$$\overline{L}_{\frac{k}{2}} = \frac{\overline{L}_x \overline{X}}{\overline{L} - \overline{X}} = 0{,}00052H \approx \frac{L_k}{4}$$

Die Fehlerbetrachtung macht man wieder mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial L_k}{\partial L_x} = \frac{X}{L - X}$$
$$\frac{\partial L_k}{\partial X} = \frac{L_x L}{(L - X)^2}$$
$$\frac{\partial L_k}{\partial L} = -\frac{L_x X}{(L - X)^2}$$
$$\Rightarrow \Delta\overline{L}_{\frac{k}{2}} = \sqrt{\Delta L_x{}^2\left(\frac{\overline{X}}{\overline{L} - \overline{X}}\right)^2 + \Delta X^2\left(\frac{\overline{L}_x L}{(\overline{L} - \overline{X})^2}\right)^2 + \Delta L^2\left(\frac{\overline{L}_x \overline{X}}{(\overline{L} - \overline{X})^2}\right)^2} = 0{,}000025H$$
$$\Rightarrow L_x = 0{,}00052H \pm 0{,}000025H$$

2) Kondensator:

Aus der Abgleichbedingung bekommt man:

$$C_x = \frac{L - X}{X} C$$
$$\Rightarrow C_x = 2{,}47\mu F$$

Die Unsicherheiten abermals mit partieller Ableitung:

$$\frac{\partial C_x}{\partial L} = \frac{C}{X}$$
$$\frac{\partial C_x}{\partial X} = -\frac{CL}{X^2}$$
$$\frac{\partial C_x}{\partial C} = \frac{L - X}{X}$$
$$\Rightarrow \Delta C_x = \sqrt{\Delta L^2\left(\frac{\overline{C}}{\overline{X}}\right)^2 + \Delta X^2\left(\frac{\overline{C}\overline{L}}{\overline{X}^2}\right)^2 + \Delta C^2\left(\frac{\overline{L} - \overline{X}}{X}\right)^2} = 0{,}024\mu F \Rightarrow C_x = 2{,}47\mu F \pm 0{,}024\mu F$$